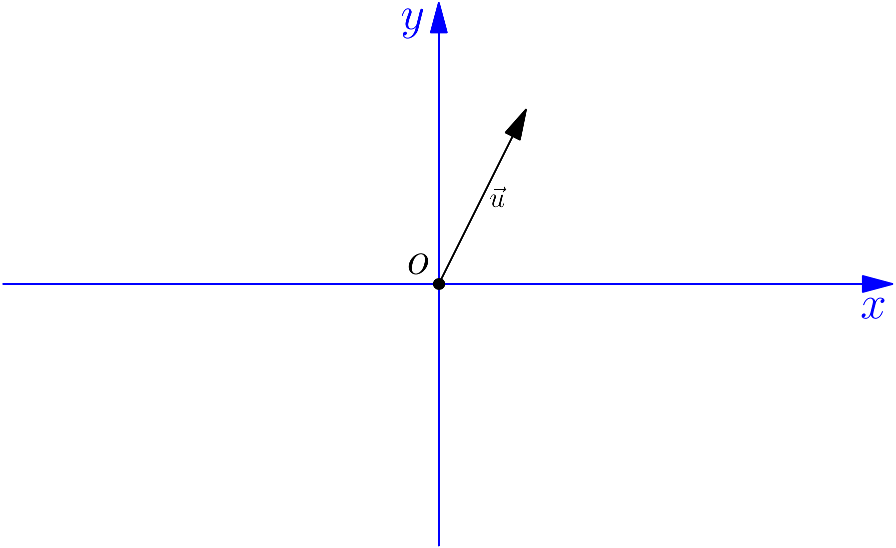
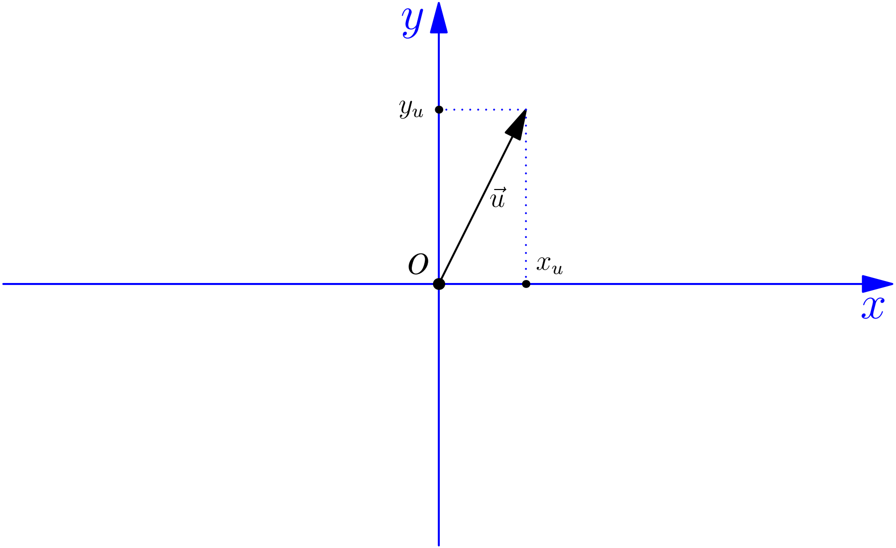
Espaces vectoriels

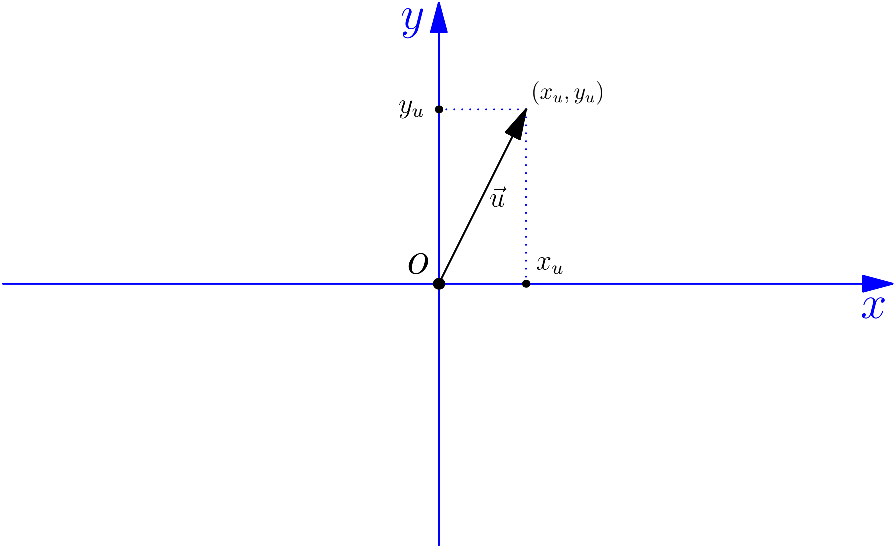
1. Espaces vectoriels
   - Vecteurs du plan
   - Vecteurs de l'espace
   - Somme de vecteurs
   - Multiplication par un scalaire
   - Définition d'un espace vectoriel
   - Sous-espace vectoriel
   - Combinaisons linéaires, partie génératrice
   - Indépendance linéaire
   - Somme de sous-espaces vectoriels

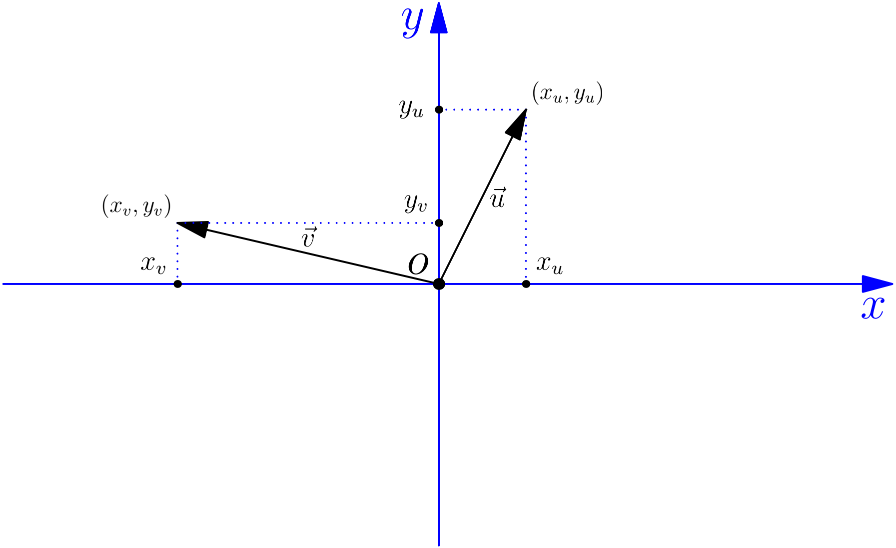


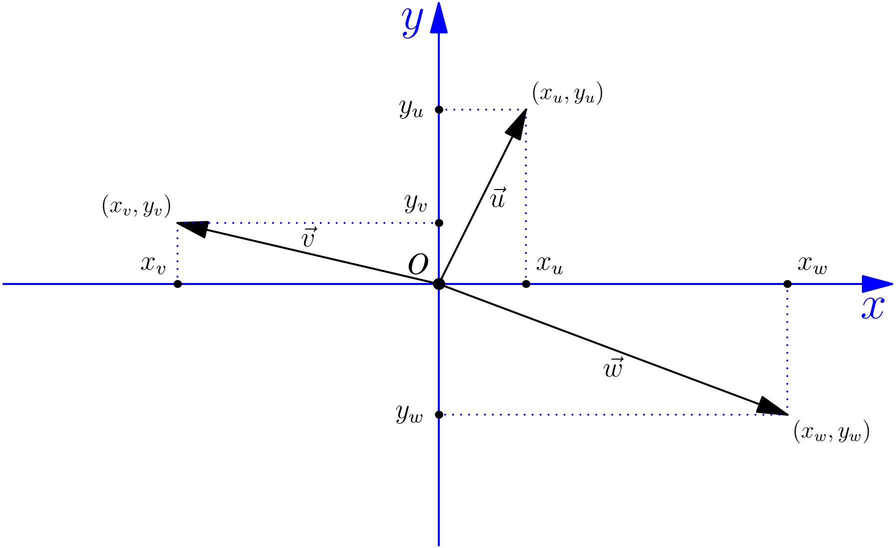
y
$\vec{u}$
O
x

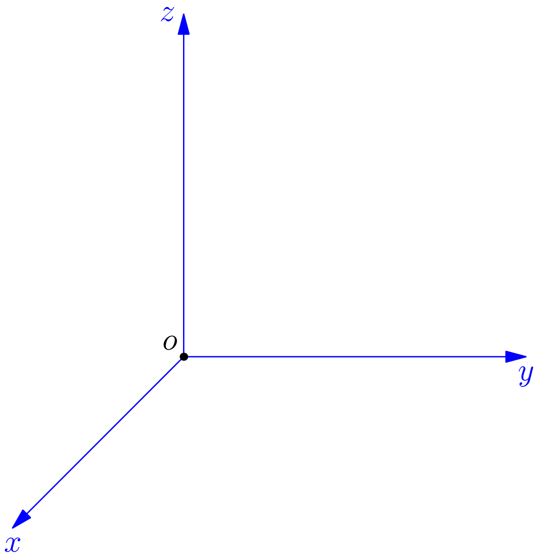


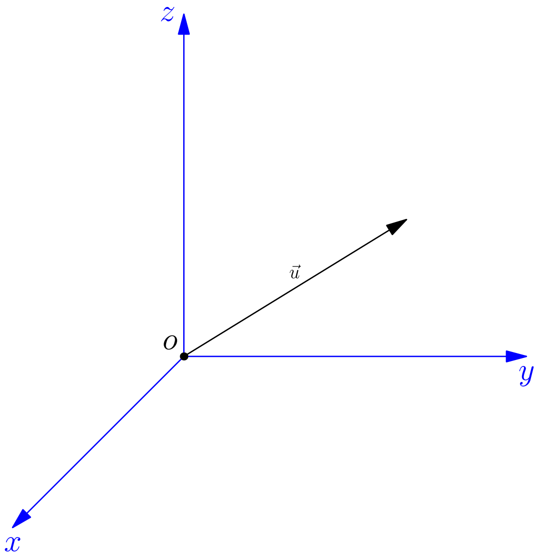
y
y_u
$\vec{u}$
O
x_u
x

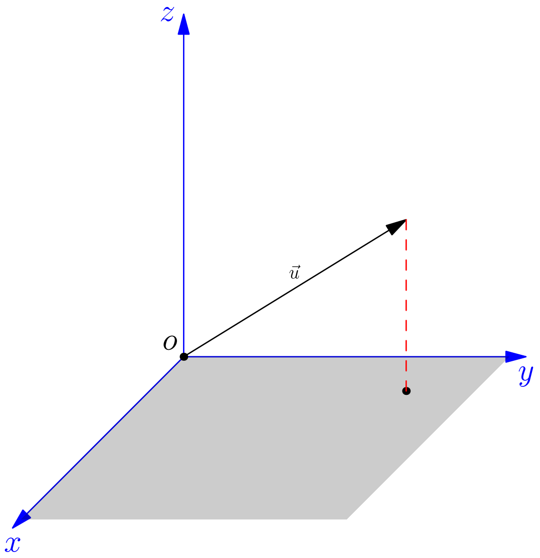

y
(x_u, y_u)
y_u
$\vec{u}$
O
x_u
x

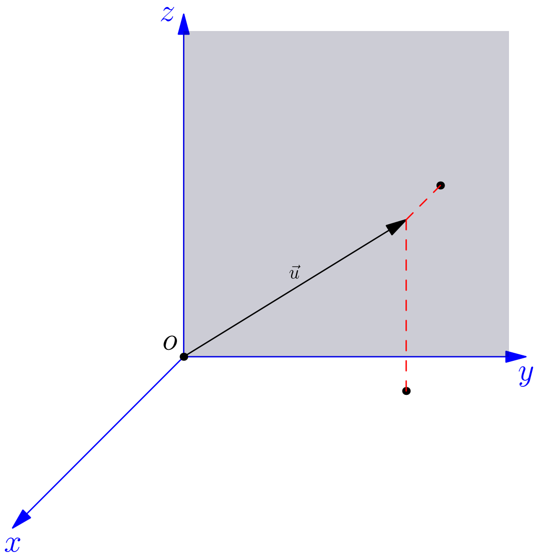

y
y_u
(x_u, y_u)
y_v
(x_v, y_v)
$\vec{u}$
$\vec{v}$
O
x_v
x_u
x

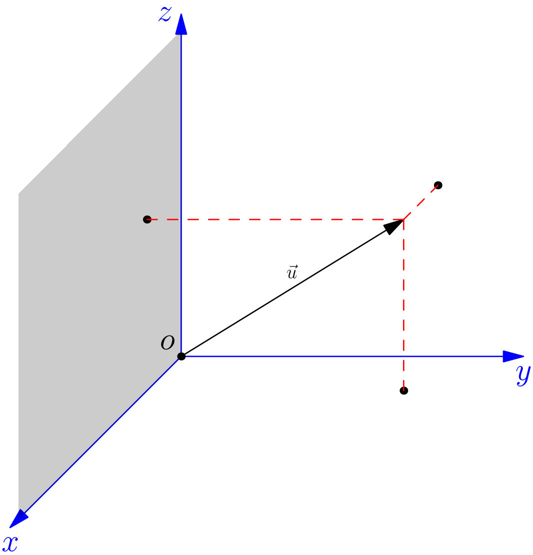

y
x
O
y_u
(x_u, y_u)
$\vec{u}$
x_u
(x_v, y_v)
y_v
$\vec{v}$
x_v
x_w
$\vec{w}$
y_w
(x_w, y_w)

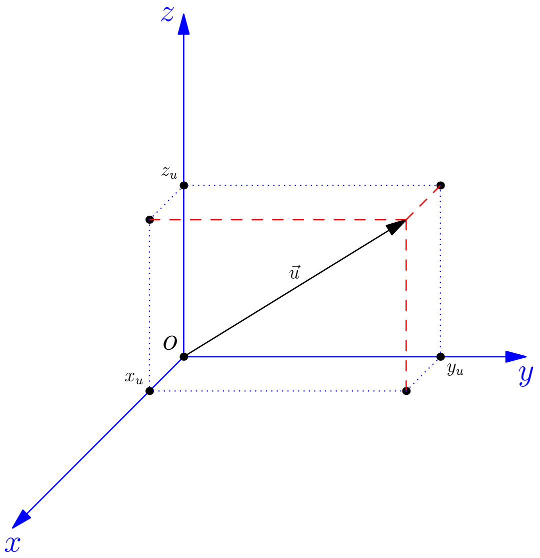

z
O
y
x

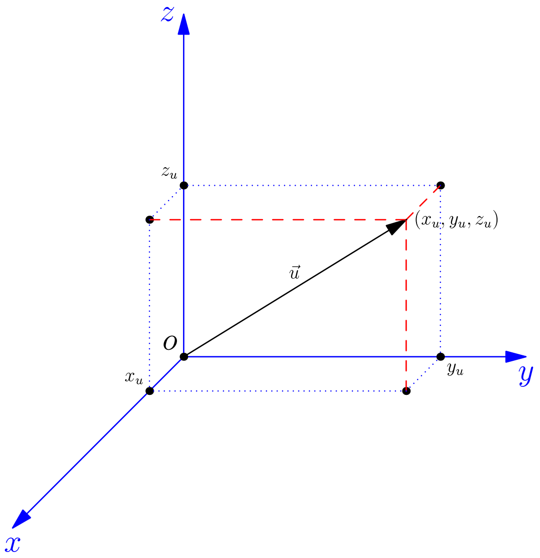

z
$\vec{u}$
O
y
x

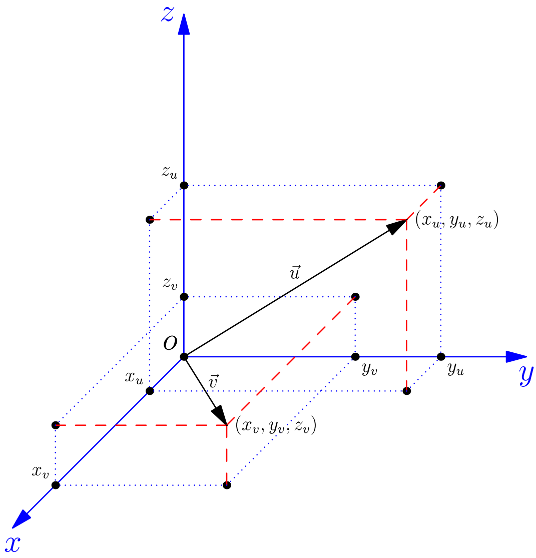

z
$\vec{u}$
O
y
x

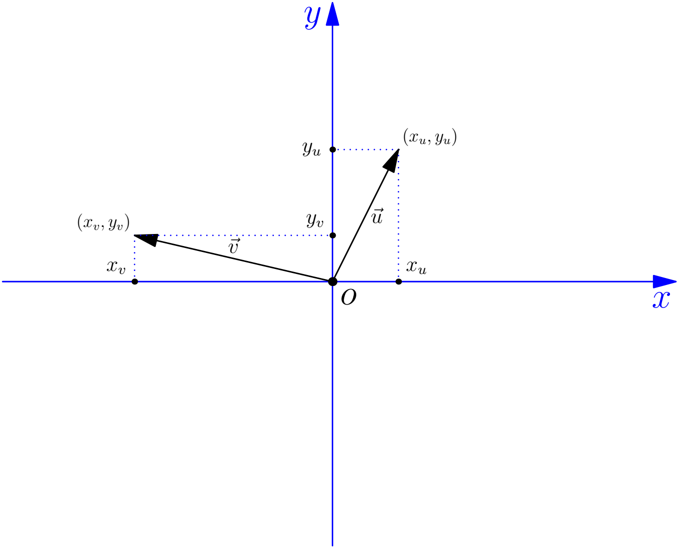

z
O
$\vec{u}$
y
x

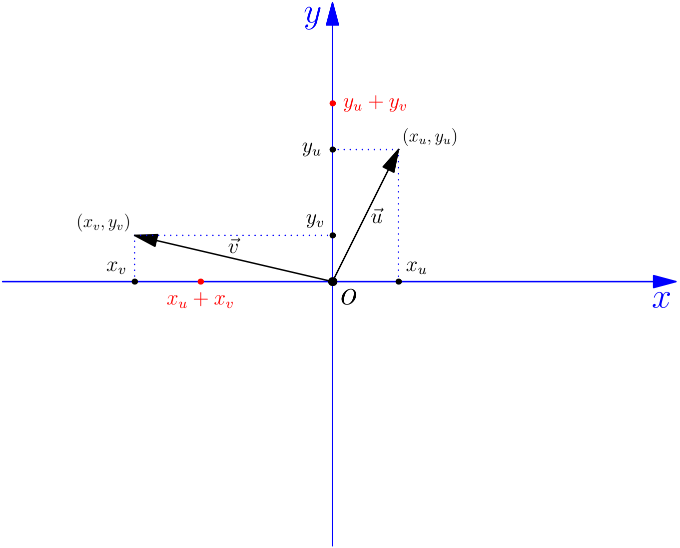

z
O
$\vec{u}$
y
x

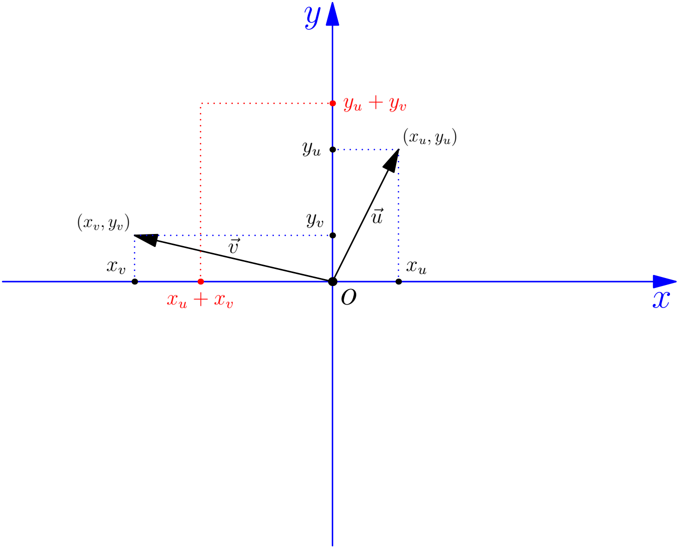

z
z_u
$\vec{u}$
O
x_u
y_u
y
x

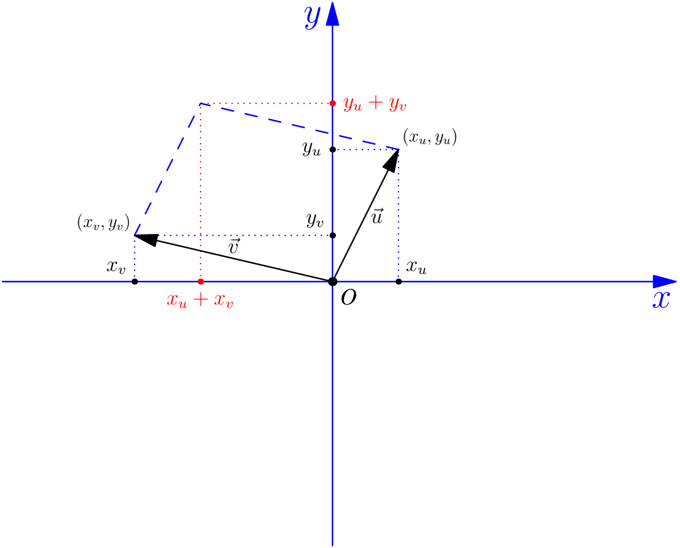

z
z_u
(x_u, y_u, z_u)
$\vec{u}$
O
x_u
y_u
y
x

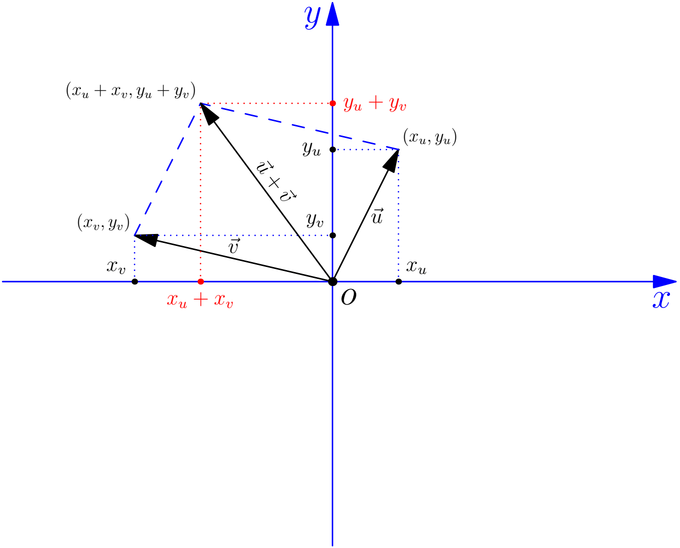

z
z_u
(x_u, y_u, z_u)
$\vec{u}$
z_v
O
y_v
y_u
y
x_u
$\vec{v}$
(x_v, y_v, z_v)
x_v
x

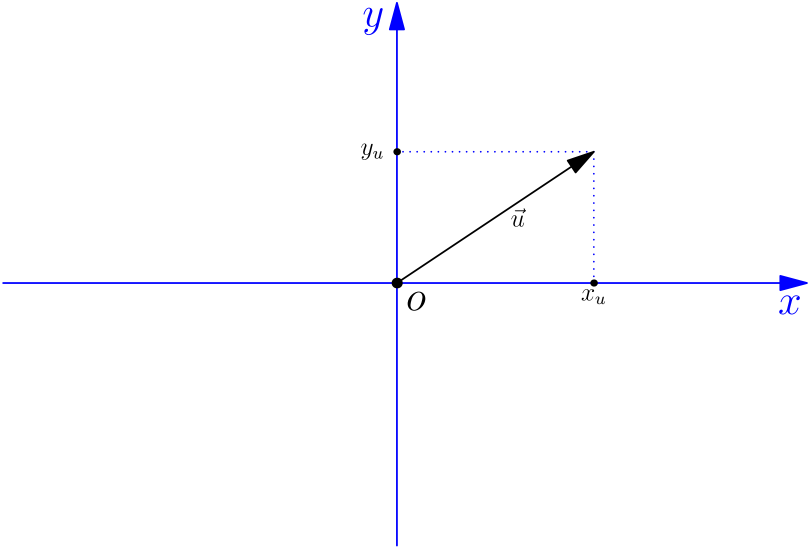

y
y_u
(x_u, y_u)
(x_v, y_v)
y_v
$\vec{u}$
$\vec{v}$
x_v
x_u
O
x

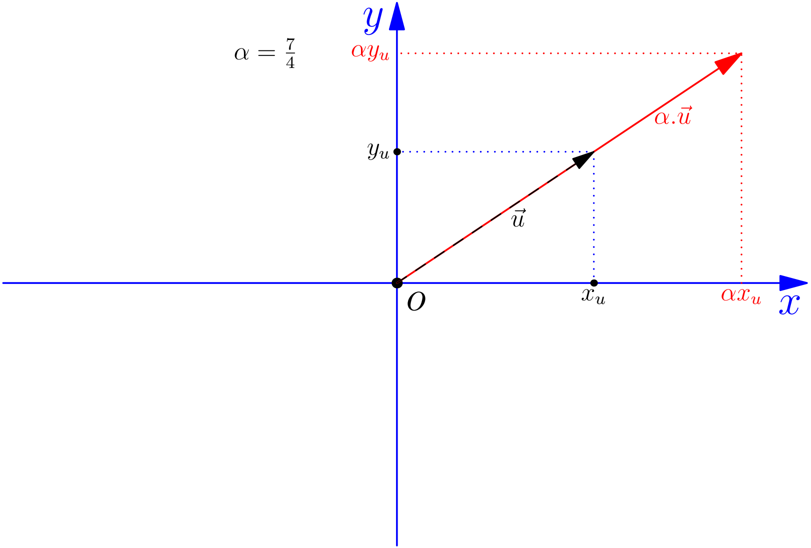

y
$y_u + y_v$
(x_u, y_u)
y_u
(x_v, y_v)
y_v
$\vec{u}$
$\vec{v}$
x_v
x_u
$x_u + x_v$
O
x


y
$y_u + y_v$
(x_u, y_u)
y_u
(x_v, y_v)
y_v
$\vec{u}$
$\vec{v}$
x_v
x_u
$x_u + x_v$
O
x

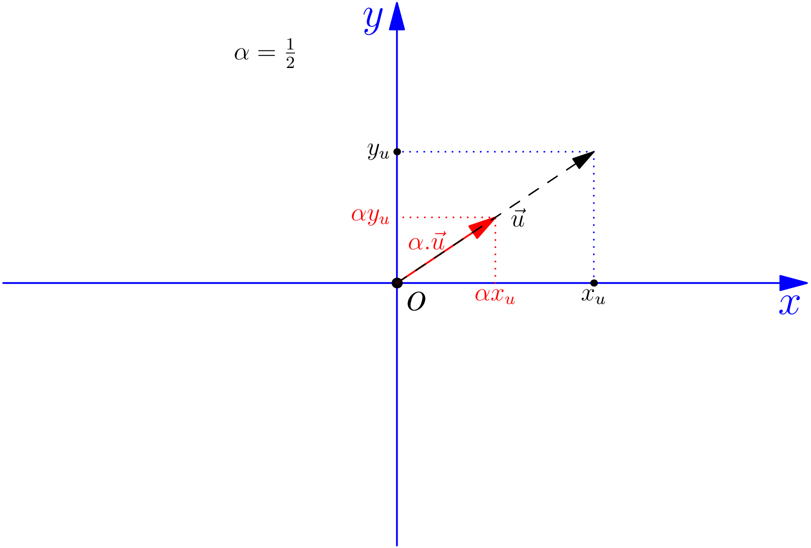

y
$y_u + y_v$
(x_u, y_u)
y_u
y_v
(x_v, y_v)
$\vec{u}$
$\vec{v}$
x_v
x_u
$x_u + x_v$
O
x

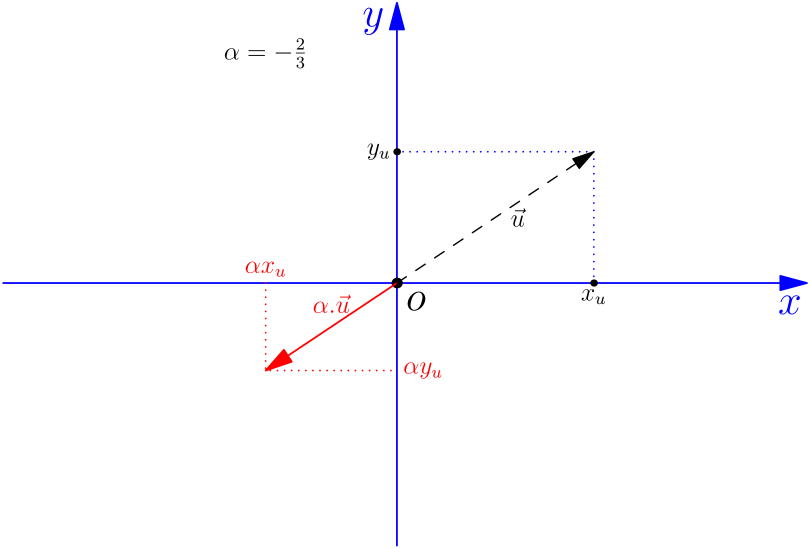

y
$(x_u + x_v, y_u + y_v)$
$y_u + y_v$
(x_u, y_u)
y_u
$\vec{u} + \vec{v}$
(x_v, y_v)
y_v
$\vec{u}$
$\vec{v}$
x_v
x_u
$x_u + x_v$
O
x


y
y_u
$\vec{u}$
O
x_u
x


$\alpha = \frac{7}{4}$
y
αy_u
$\alpha.\vec{u}$
y_u
$\vec{u}$
O
x_u
αx_u
x

$\alpha = \frac{1}{2}$





y
$\alpha = -\frac{2}{3}$
y_u
$\vec{u}$
αx_u
$\alpha.\vec{u}$
O
x_u
x
αy_u

Espaces vectoriel, définition

Un ensemble E, muni d'une addition et d'une multiplication externe par des nombres réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si les deux opérations vérifient :

Espaces vectoriel, définition

Propriété de l'addition

- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E \ : \qquad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Espaces vectoriel, définition

Propriété de l'addition

- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E \ : \qquad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E \ : \qquad \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

Espaces vectoriel, définition

Propriété de l'addition

- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E \ : \qquad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E \ : \qquad \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$
- $\exists \vec{0} \in E \ : \quad \forall \vec{u} \in E \ : \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$

Espaces vectoriel, définition

Propriété de l'addition

- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E \; : \quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E \; : \quad \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$
- $\exists \vec{0} \in E \; : \quad \forall \vec{u} \in E \; : \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$
- $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E$ (noté : $-\vec{u}$) tel que : $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u} = \vec{0}$

Espaces vectoriel, définition

Propriétés de la multiplication externe

- $\forall \vec{u} \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; : \alpha.\left(\beta.\vec{u}\right) = \alpha\beta.\left(\vec{u}\right)$

Espaces vectoriel, définition

Propriétés de la multiplication externe

- $\forall \vec{u} \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ : \alpha.\left(\beta.\vec{u}\right) = \alpha\beta.\left(\vec{u}\right)$
- $\forall \vec{u} \in E \ : 1.\vec{u} = \vec{u}$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Espaces vectoriel, définition

Relation de l'addition et de la multiplication externe

- $\forall \vec{u} \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ : (\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$

Espaces vectoriel, définition

Relation de l'addition et de la multiplication externe

- $\forall \vec{u} \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha.\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$

Sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ une partie non-vide de E.

F est un sous-espace vectoriel de E, si :

- $\vec{u}, \vec{v} \in F \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in F$ (stabilité par addition)

Sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ une partie non-vide de E.

F est un sous-espace vectoriel de E, si :

- $\vec{u}\,,\vec{v} \in F \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in F$ (stabilité par addition)
- $\vec{u} \in F,\ \ \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha.\vec{u} \in F$ (stabilité par multiplication externe)

Combinaisons linéaires

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$

Combinaisons linéaires

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$,

Combinaisons linéaires

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$, une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E,

Combinaisons linéaires

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$, une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_i$ (ou combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$),

le vecteur $\vec{v}$:

Combinaisons linéaires

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\} = \{\vec{u}_i\}_{1\leq i\leq n}$, une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_i$ (ou combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$),

le vecteur $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \alpha_1.\vec{u}_1 + \alpha_2.\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n.\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\vec{u}_i \quad \left(\alpha_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\right)$$

Partie génératrice

Proposition : Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

Partie génératrice

Proposition : Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

L'ensemble F de toutes les combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$, est un sous-espace vectoriel de E.

Partie génératrice

Proposition : Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

L'ensemble F de toutes les combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$, est un sous-espace vectoriel de E.

On note $F = \text{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$

Partie génératrice

Proposition : Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

L'ensemble F de toutes les combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$, est un sous-espace vectoriel de E.

On note $F = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$

F est engendré par $\mathcal{F}$, ou $\mathcal{F}$ est une partie génératrice de F.

Famille libre

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

Famille libre

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est libre, si :

$$\alpha_1.\vec{u}_1 + \alpha_2.\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n.\vec{u}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Famille libre

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est libre, si :

$$\alpha_1.\vec{u}_1 + \alpha_2.\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n.\vec{u}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

On dit aussi : les vecteurs $\vec{u}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ sont linéairement indépendants.

Famille libre

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est libre, si :

$$\alpha_1.\vec{u}_1 + \alpha_2.\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n.\vec{u}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

On dit aussi : les vecteurs $\vec{u}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ sont linéairement indépendants.

Un famille qui n'est pas libre est dite liée.

Famille libre

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{u} = (2, 0, 3, 0), \vec{v} = (0, -1, 0, 0), \vec{w} = (5, -2, 0, 0)$$

Famille libre

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{u} = (2, 0, 3, 0), \vec{v} = (0, -1, 0, 0), \vec{w} = (5, -2, 0, 0)$$

La famille $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est libre.

Famille libre
Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{u} = (2, 0, 3, 0), \vec{v} = (0, -1, 0, 0), \vec{w} = (5, -2, 0, 0)$$

La famille $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$

Famille libre
Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{u} = (2,0,3,0), \vec{v} = (0,-1,0,0), \vec{w} = (5,-2,0,0)$$

La famille $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$
Alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2\alpha + 5\gamma & = & 0 \\ -\beta - 2\gamma & = & 0 \\ 3\alpha & = & 0 \end{array}\right.$$

Famille libre

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{u} = (2, 0, 3, 0), \vec{v} = (0, -1, 0, 0), \vec{w} = (5, -2, 0, 0)$$

La famille $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$
Alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha + 5\gamma & = & 0 \\ -\beta - 2\gamma & = & 0 \\ 3\alpha & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Famille libre

Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2, \vec{v}(X) = X(X-1), \vec{w}(X) = (X-1)^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Famille libre
Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2, \vec{v}(X) = X(X-1), \vec{w}(X) = (X-1)^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

La famille $\mathcal{F}$ est linéairement indépendante.

Famille libre

Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2, \vec{v}(X) = X(X-1), \vec{w}(X) = (X-1)^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

La famille $\mathcal{F}$ est linéairement indépendante.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u}(X) + \beta.\vec{v}(X) + \gamma.\vec{w}(X) = \vec{0}$

Famille libre

Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2, \vec{v}(X) = X(X-1), \vec{w}(X) = (X-1)^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

La famille $\mathcal{F}$ est linéairement indépendante.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u}(X) + \beta.\vec{v}(X) + \gamma.\vec{w}(X) = \vec{0}$
Alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ \beta + 2\gamma & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

Famille libre
Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2\,, \vec{v}(X) = X(X-1)\,, \vec{w}(X) = (X-1)^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

La famille $\mathcal{F}$ est linéairement indépendante.

Soient $\alpha\,,\beta\,,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u}(X) + \beta.\vec{v}(X) + \gamma.\vec{w}(X) = \vec{0}$
Alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ \beta + 2\gamma & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Famille libre

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soit la famille de vecteurs :
$\vec{u} = (1\,,-1)\,,\vec{v} = (1\,,3)\,,\vec{w} = (2\,,5)$.

Famille libre

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soit la famille de vecteurs :
$\vec{u} = (1, -1), \vec{v} = (1, 3), \vec{w} = (2, 5)$.

La famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Famille libre

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soit la famille de vecteurs :
$\vec{u} = (1\,,-1)\,,\vec{v} = (1\,,3)\,,\vec{w} = (2\,,5)$.

La famille $\{\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\}$ est liée.

Soient $\alpha\,,\beta\,,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$

Famille libre

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soit la famille de vecteurs :
$\vec{u} = (1, -1), \vec{v} = (1, 3), \vec{w} = (2, 5)$.

La famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$
Alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta + 2\gamma & = & 0 \\ -\alpha + 3\beta + 5\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

Famille libre

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soit la famille de vecteurs :
$\vec{u} = (1, -1), \vec{v} = (1, 3), \vec{w} = (2, 5)$.

La famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$
Alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta + 2\gamma & = & 0 \\ -\alpha + 3\beta + 5\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $\alpha = -\frac{1}{4}, \beta = -\frac{7}{4}, \gamma = 1$

Famille libre

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soit la famille de vecteurs :
$\vec{u} = (1, -1), \vec{v} = (1, 3), \vec{w} = (2, 5)$.

La famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$
Alors :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma & = & 0 \\ -\alpha + 3\beta + 5\gamma & = & 0 \end{cases}$$

Donc $\alpha = -\frac{1}{4}, \beta = -\frac{7}{4}, \gamma = 1$ et : $\vec{w} = \frac{1}{4}.\vec{u} + \frac{7}{4}.\vec{v}$

Famille libre

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soit la famille de vecteurs :
$\vec{u} = (1, -1), \vec{v} = (1, 3), \vec{w} = (2, 5)$.

La famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$
Alors :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma & = & 0 \\ -\alpha + 3\beta + 5\gamma & = & 0 \end{cases}$$

Donc $\alpha = -\frac{1}{4}, \beta = -\frac{7}{4}, \gamma = 1$ et : $\vec{w} = \frac{1}{4}.\vec{u} + \frac{7}{4}.\vec{v}$

Remarque : Quand une famille est liée, on peut exprimer des vecteurs de la famille comme combinaison linéaire des autres.

Famille libre

Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2 + 1, \vec{v}(X) = X^2 - 1, \vec{w}(X) = X^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

Famille libre

Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2 + 1, \vec{v}(X) = X^2 - 1, \vec{w}(X) = X^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille $\mathcal{F}$ est liée.

Famille libre

Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2 + 1, \vec{v}(X) = X^2 - 1, \vec{w}(X) = X^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille $\mathcal{F}$ est liée.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u}(X) + \beta.\vec{v}(X) + \gamma.\vec{w}(X) = \vec{0}$

Famille libre

Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2 + 1\,, \vec{v}(X) = X^2 - 1\,, \vec{w}(X) = X^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille $\mathcal{F}$ est liée.

Soient $\alpha\,, \beta\,, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u}(X) + \beta.\vec{v}(X) + \gamma.\vec{w}(X) = \vec{0}$
Alors :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha - \beta & = & 0 \end{cases}$$

Famille libre

Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2 + 1, \vec{v}(X) = X^2 - 1, \vec{w}(X) = X^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille $\mathcal{F}$ est liée.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u}(X) + \beta.\vec{v}(X) + \gamma.\vec{w}(X) = \vec{0}$
Alors :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha - \beta & = & 0 \end{cases}$$

Donc $\alpha = \beta = -\dfrac{\gamma}{2}$

Famille libre
Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2 + 1, \vec{v}(X) = X^2 - 1, \vec{w}(X) = X^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille $\mathcal{F}$ est liée.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u}(X) + \beta.\vec{v}(X) + \gamma.\vec{w}(X) = \vec{0}$
Alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha - \beta & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $\alpha = \beta = -\dfrac{\gamma}{2}$

En prenant $\gamma = -2$: $\quad \vec{u}(X) + \vec{v}(X) - 2\vec{w}(X) = 0$

Famille libre

Remarques

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre dans un espace vectoriel E.

Famille libre

Remarques

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre dans un espace vectoriel E.

- $\forall i \ (1 \leq i \leq n), \quad \vec{u}_i \neq \vec{0}$

Famille libre

Remarques

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre dans un espace vectoriel E.

- $\forall i \; (1 \leq i \leq n), \quad \vec{u}_i \neq \vec{0}$
- Si $i \neq j, \quad \vec{u}_i \neq \vec{u}_j$

Base d'un espace vectoriel

On appelle base d'un espace vectoriel, une famille de vecteurs, $\mathcal{B}$, à la fois libre et génératrice.

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, avec :

$$\vec{e}_1 = (1, 0) \text{ et } \vec{e}_2 = (0, 1),$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, avec :

$$\vec{e}_1 = (1, 0) \text{ et } \vec{e}_2 = (0, 1),$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha.\vec{e}_1 + \beta.\vec{e}_2 = \vec{0}$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \end{array} \right.$$

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, avec :

$$\vec{e}_1 = (1, 0) \text{ et } \vec{e}_2 = (0, 1),$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha.\vec{e}_1 + \beta.\vec{e}_2 = \vec{0}$, alors :

$$\begin{cases} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \end{cases}$$

- $\mathcal{B}$ est génératrice : si $\vec{u} = (x_u, y_u), \quad x_u, y_u \in \mathbb{R}$

$$\text{et : } \vec{u} = x_u.\vec{e}_1 + y_u.\vec{e}_2$$

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1\,, \vec{u}_2\}$, avec :

$$\vec{u}_1 = (1, 2) \text{ et } \vec{u}_2 = (-2, 3),$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, avec :

$$\vec{u}_1 = (1,2) \text{ et } \vec{u}_2 = (-2,3),$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha.\vec{u}_1 + \beta.\vec{u}_2 = \vec{0}$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha - 2\beta & = & 0 \\ 2\alpha + 3\beta & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc : $\alpha = \beta = 0$

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, avec :

$$\vec{u}_1 = (1, 2) \text{ et } \vec{u}_2 = (-2, 3),$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha.\vec{u}_1 + \beta.\vec{u}_2 = \vec{0}$, alors :

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta & = & 0 \\ 2\alpha + 3\beta & = & 0 \end{cases}$$

  Donc : $\alpha = \beta = 0$

- $\mathcal{B}$ est génératrice : si $\vec{v} = (x_v, y_v)$, alors :

$$\vec{v} = \frac{3x_v + 2y_v}{7} \cdot \vec{u}_1 + \frac{-2x_v + y_v}{7} \cdot \vec{u}_2$$

Base d'un espace vectoriel
Exemple

Dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, $\mathbb{R}_3[X]$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{f}_0(X), \vec{f}_1(X), \vec{f}_2(X), \vec{f}_3(X)\}$ avec :

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, $\mathbb{R}_3[X]$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{f}_0(X), \vec{f}_1(X), \vec{f}_2(X), \vec{f}_3(X)\}$ avec :

$$\vec{f}_0(X) = 1,\ \vec{f}_1(X) = X,\ \vec{f}_2(X) = X^2,\ \vec{f}_3(X) = X^3$$

est une base.

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, $\mathbb{R}_3[X]$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{f}_0(X), \vec{f}_1(X), \vec{f}_2(X), \vec{f}_3(X)\}$ avec :

$$\vec{f}_0(X) = 1,\ \vec{f}_1(X) = X,\ \vec{f}_2(X) = X^2,\ \vec{f}_3(X) = X^3$$

est une base.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha_0.\vec{f}_0(X) + \alpha_1.\vec{f}_1(X) + \alpha_2.\vec{f}_2(X) + \alpha_3.\vec{f}_3(X) = \vec{0}$, alors :

Base d'un espace vectoriel
Exemple

Dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, $\mathbb{R}_3[X]$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{f}_0(X), \vec{f}_1(X), \vec{f}_2(X), \vec{f}_3(X)\}$ avec :

$$\vec{f}_0(X) = 1,\ \vec{f}_1(X) = X,\ \vec{f}_2(X) = X^2,\ \vec{f}_3(X) = X^3$$

est une base.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha_0.\vec{f}_0(X) + \alpha_1.\vec{f}_1(X) + \alpha_2.\vec{f}_2(X) + \alpha_3.\vec{f}_3(X) = \vec{0}$, alors :

$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 = 0$$

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, $\mathbb{R}_3[X]$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{f}_0(X), \vec{f}_1(X), \vec{f}_2(X), \vec{f}_3(X)\}$ avec :

$$\vec{f}_0(X) = 1,\ \vec{f}_1(X) = X,\ \vec{f}_2(X) = X^2,\ \vec{f}_3(X) = X^3$$

est une base.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha_0.\vec{f}_0(X) + \alpha_1.\vec{f}_1(X) + \alpha_2.\vec{f}_2(X) + \alpha_3.\vec{f}_3(X) = \vec{0}$, alors :

$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 = 0$$

donc : $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, $\mathbb{R}_3[X]$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{f}_0(X), \vec{f}_1(X), \vec{f}_2(X), \vec{f}_3(X)\}$ avec :

$$\vec{f}_0(X) = 1,\ \vec{f}_1(X) = X,\ \vec{f}_2(X) = X^2,\ \vec{f}_3(X) = X^3$$

est une base.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha_0.\vec{f}_0(X) + \alpha_1.\vec{f}_1(X) + \alpha_2.\vec{f}_2(X) + \alpha_3.\vec{f}_3(X) = \vec{0}$, alors :

  $$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 = 0$$

  donc : $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$
- $\mathcal{B}$ est génératrice puisque tout polynôme de degré au plus 3, s'écrit :

  $$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3$$

Base d'un espace vectoriel

Théorème : Si un espace vectoriel possède une partie génératrice à n éléments, toute partie ayant au moins $n+1$ éléments est liée.

Base d'un espace vectoriel

Théorème : Si un espace vectoriel possède une partie génératrice à n éléments, toute partie ayant au moins $n+1$ éléments est liée.

(Théorème admis)

Base d'un espace vectoriel

Théorème : Si un espace vectoriel possède une partie génératrice à n éléments, toute partie ayant au moins $n+1$ éléments est liée.

(Théorème admis)

Corollaire : Dans un espace vectoriel, E, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Démonstration du corollaire

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de cardinal n_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de cardinal n_2.

Démonstration du corollaire

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de cardinal n_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de cardinal n_2.

$\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ génératrice,

Démonstration du corollaire

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de cardinal n_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de cardinal n_2.

$\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ génératrice, donc : $n_1 \leq n_2$

Démonstration du corollaire

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de cardinal n_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de cardinal n_2.

$\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ génératrice, donc : $n_1 \leq n_2$

$\mathcal{B}_2$ est libre et $\mathcal{B}_1$ génératrice,

Démonstration du corollaire

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de cardinal n_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de cardinal n_2.

$\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ génératrice, donc : $n_1 \leq n_2$

$\mathcal{B}_2$ est libre et $\mathcal{B}_1$ génératrice, donc : $n_2 \leq n_1$

Démonstration du corollaire

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de cardinal n_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de cardinal n_2.

$\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ génératrice, donc : $n_1 \leq n_2$

$\mathcal{B}_2$ est libre et $\mathcal{B}_1$ génératrice, donc : $n_2 \leq n_1$

$$n_1 = n_2$$

Base d'un espace vectoriel

Théorème : Si un espace vectoriel possède une partie génératrice à n éléments, toute partie ayant au moins $n+1$ éléments est liée.

(Théorème admis)

Corollaire : Dans un espace vectoriel, E, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Ce nombre s'appelle la dimension de l'espace vectoriel E.

Base d'un espace vectoriel

Théorème : Si un espace vectoriel possède une partie génératrice à n éléments, toute partie ayant au moins $n+1$ éléments est liée.

(Théorème admis)

Corollaire : Dans un espace vectoriel, E, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Ce nombre s'appelle la dimension de l'espace vectoriel E.

Notation : $\dim E$

Base d'un espace vectoriel

Propriétés des bases d'un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel E de dimension n :

- Toute famille libre de n vecteurs est une base.

Base d'un espace vectoriel

Propriétés des bases d'un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel E de dimension n :

- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Base d'un espace vectoriel

Propriétés des bases d'un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel E de dimension n :

- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.
- Toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.

Base d'un espace vectoriel

Propriétés des bases d'un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel E de dimension n :

- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.
- Toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.
- Toute famille contenant moins de n vecteurs n'est pas génératrice.

Base d'un espace vectoriel

Propriétés des bases d'un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel E de dimension n :

- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.
- Toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.
- Toute famille contenant moins de n vecteurs n'est pas génératrice.

Autre expression :

Base d'un espace vectoriel

Propriétés des bases d'un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel E de dimension n :

- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.
- Toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.
- Toute famille contenant moins de n vecteurs n'est pas génératrice.

Autre expression :

- Une base est une famille libre maximale

Base d'un espace vectoriel

Propriétés des bases d'un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel E de dimension n :

- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.
- Toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.
- Toute famille contenant moins de n vecteurs n'est pas génératrice.

Autre expression :

- Une base est une famille libre maximale
- Une base est une partie génératrice minimale

Base d'un espace vectoriel

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ sont de dimension n.

Base d'un espace vectoriel

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ sont de dimension n.

Les familles $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}$ où :

$$\vec{e}_i = (0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ième position}}}{1},0,\ldots,0)$$

sont des bases de $\mathbb{R}^n$

Base d'un espace vectoriel

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ sont de dimension n.

Les familles $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}$ où :

$$\vec{e}_i = (0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ième position}}}{1},0,\ldots,0)$$

sont des bases de $\mathbb{R}^n$

On les appelle les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$

Base d'un espace vectoriel

Unicité de l'écriture dans une base

Proposition : Soit une base $\mathcal{B} = \{\vec{a}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base d'un espace vectoriel E de dimension n.

Base d'un espace vectoriel

Unicité de l'écriture dans une base

Proposition : Soit une base $\mathcal{B} = \{\vec{a}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base d'un espace vectoriel E de dimension n.

Tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit de manière unique :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\vec{a}_i$$

Base d'un espace vectoriel

Unicité de l'écriture dans une base

Proposition : Soit une base $\mathcal{B} = \{\vec{a}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base d'un espace vectoriel E de dimension n.

Tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit de manière unique :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \vec{a}_i$$

Les scalaires α_i s'appellent les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $F \neq \{\vec{0}\}$ un sous-espace vectoriel de E.

- Toute famille libre de F est libre dans E.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $F \neq \{\vec{0}\}$ un sous-espace vectoriel de E.

- Toute famille libre de F est libre dans E.
- Soit p le nombre de vecteurs d'une famille maximale libre, $\mathcal{B}$, de F :

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $F \neq \{\vec{0}\}$ un sous-espace vectoriel de E.

- Toute famille libre de F est libre dans E.
- Soit p le nombre de vecteurs d'une famille maximale libre, $\mathcal{B}$, de F :
    1. $\mathcal{B}$ est une base de F

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $F \neq \{\vec{0}\}$ un sous-espace vectoriel de E.

- Toute famille libre de F est libre dans E.
- Soit p le nombre de vecteurs d'une famille maximale libre, $\mathcal{B}$, de F :
  1. $\mathcal{B}$ est une base de F
  2. $p \leq n$

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $F \neq \{\vec{0}\}$ un sous-espace vectoriel de E.

- Toute famille libre de F est libre dans E.
- Soit p le nombre de vecteurs d'une famille maximale libre, $\mathcal{B}$, de F :
  1. $\mathcal{B}$ est une base de F
  2. $p \leq n$
  3. Si $p = n$, $\mathcal{B}$ est une base de E et $F = E$.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème : Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, de dimension n :

1. $\dim F \leq \dim E$

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème : Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, de dimension n :

1. $\dim F \leq \dim E$
2. $\dim F = \dim E \quad \Rightarrow \quad F = E$

Théorème de la base incomplète

Théorème : Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{L}$ une famille libre dans E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

Théorème de la base incomplète

Théorème : Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{L}$ une famille libre dans E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

Parmi toutes les familles libres contenant $\mathcal{L}$ et incluses dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$, soit $\mathcal{B}$ une partie maximale.

Théorème de la base incomplète

Théorème : Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{L}$ une famille libre dans E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

Parmi toutes les familles libres contenant $\mathcal{L}$ et incluses dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$, soit $\mathcal{B}$ une partie maximale.

On pose $F = \text{Vect}\left(\mathcal{B}\right)$.

Théorème de la base incomplète

Théorème : Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{L}$ une famille libre dans E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

Parmi toutes les familles libres contenant $\mathcal{L}$ et incluses dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$, soit $\mathcal{B}$ une partie maximale.

On pose $F = \text{Vect}\left(\mathcal{B}\right)$.

- Si $F = E$, $\mathcal{B}$ est la base cherchée.

Théorème de la base incomplète

Théorème : Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{L}$ une famille libre dans E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

Parmi toutes les familles libres contenant $\mathcal{L}$ et incluses dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$, soit $\mathcal{B}$ une partie maximale.

On pose $F = \text{Vect}\left(\mathcal{B}\right)$.

- Si $F = E$, $\mathcal{B}$ est la base cherchée.
- Si $F \neq E$, $\quad \exists \vec{g} \in \mathcal{G}$ tel que $\vec{g} \notin F$.

Théorème de la base incomplète

Théorème : Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{L}$ une famille libre dans E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

Parmi toutes les familles libres contenant $\mathcal{L}$ et incluses dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$, soit $\mathcal{B}$ une partie maximale.

On pose $F = \text{Vect}\left(\mathcal{B}\right)$.

- Si $F = E$, $\mathcal{B}$ est la base cherchée.
- Si $F \neq E$, $\quad \exists \vec{g} \in \mathcal{G}$ tel que $\vec{g} \notin F$.

  Alors, $\mathcal{B} \cup \{\vec{g}\}$ est libre, contient $\mathcal{B}$ et est contenue dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

Théorème de la base incomplète

Théorème : Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{L}$ une famille libre dans E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

Parmi toutes les familles libres contenant $\mathcal{L}$ et incluses dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$, soit $\mathcal{B}$ une partie maximale.

On pose $F = \text{Vect}\left(\mathcal{B}\right)$.

- Si $F = E$, $\mathcal{B}$ est la base cherchée.
- Si $F \neq E$, $\quad \exists \vec{g} \in \mathcal{G}$ tel que $\vec{g} \notin F$.

  Alors, $\mathcal{B} \cup \{\vec{g}\}$ est libre, contient $\mathcal{B}$ et est contenue dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

  donc $\mathcal{B}$ n'est pas maximale

Rang d'une famille de vecteurs

Soit une famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq p}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq p$.

Rang d'une famille de vecteurs

Soit une famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq p}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq p$.

On appelle, rang de la famille $\mathcal{F}$, la dimension du sous-espace vectoriel F engendré par $\mathcal{F}$.

Rang d’une famille de vecteurs

Proposition : On ne change pas le rang d’une famille de vecteurs si :

Rang d'une famille de vecteurs

Proposition : On ne change pas le rang d'une famille de vecteurs si :

- On permute les vecteurs

Rang d’une famille de vecteurs

Proposition : On ne change pas le rang d’une famille de vecteurs si :

- On permute les vecteurs
- On multiplie l’un d’entre eux par un réel non-nul.

Rang d'une famille de vecteurs

Proposition : On ne change pas le rang d'une famille de vecteurs si :

- On permute les vecteurs
- On multiplie l'un d'entre eux par un réel non-nul.
- On ajoute à l'un d'entre eux par une combinaison linéaire des autres.

Rang d'une famille de vecteurs

Calcul

Calculer le rang de la famille de vecteurs :

$$\vec{u} = (1, 2, 3),\ \vec{v} = (0, 2, 1),\ \vec{w} = (2, 6, 7)$$

Rang d'une famille de vecteurs

Calcul

Calculer le rang de la famille de vecteurs :

$$\vec{u} = (1, 2, 3),\ \vec{v} = (0, 2, 1),\ \vec{w} = (2, 6, 7)$$

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} & = & (1,2,3) \\ \vec{v} & = & (0,2,1) \\ \vec{w} & = & (2,6,7) \end{array}$$

Rang d'une famille de vecteurs

Calcul

Calculer le rang de la famille de vecteurs :

$$\vec{u} = (1, 2, 3),\ \vec{v} = (0, 2, 1),\ \vec{w} = (2, 6, 7)$$

$$\begin{array}{lcl} \vec{u} & = & (1,2,3) \\ \vec{v} & = & (0,2,1) \\ \vec{w} & = & (2,6,7) \end{array}$$

On remplace $\vec{w}$ par $\vec{w} - 2\vec{u}$:

$$\begin{array}{lcl} \vec{u} & = & (1,2,3) \\ \vec{v} & = & (0,2,1) \\ \vec{w} - 2\vec{u} & = & (0,2,1) \end{array}$$

Rang d'une famille de vecteurs

Calcul

Calculer le rang de la famille de vecteurs :

$$\vec{u} = (1,2,3),\ \vec{v} = (0,2,1),\ \vec{w} = (2,6,7)$$

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} & = & (1,2,3) \\ \vec{v} & = & (0,2,1) \\ \vec{w} & = & (2,6,7) \end{array}$$

On remplace $\vec{w}$ par $\vec{w} - 2\vec{u}$:

$$\begin{array}{lcl} \vec{u} & = & (1,2,3) \\ \vec{v} & = & (0,2,1) \\ \vec{w} - 2\vec{u} & = & (0,2,1) \end{array}$$

$$\mathrm{rg}\Big(\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\Big) = 2$$

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On pose : $F_1 + F_2 = \{\vec{u} \in E \mid \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{u}_2 \in F_2\}$

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On pose : $F_1 + F_2 = \{\vec{u} \in E \mid \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{u}_2 \in F_2\}$

Proposition : $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On pose : $F_1 + F_2 = \{\vec{u} \in E \mid \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{u}_2 \in F_2\}$

Proposition : $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F_1 + F_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On pose : $F_1 + F_2 = \{\vec{u} \in E \mid \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{u}_2 \in F_2\}$

Proposition : $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F_1 + F_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\exists \vec{u}_1, \vec{v}_1 \in F_1$ et $\exists \vec{u}_2, \vec{v}_2 \in F_2$: $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On pose : $F_1 + F_2 = \{\vec{u} \in E \mid \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{u}_2 \in F_2\}$

Proposition : $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F_1 + F_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\exists \vec{u}_1, \vec{v}_1 \in F_1$ et $\exists \vec{u}_2, \vec{v}_2 \in F_2$: $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- $\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On pose : $F_1 + F_2 = \{\vec{u} \in E \mid \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{u}_2 \in F_2\}$

Proposition : $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F_1 + F_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\exists \vec{u}_1, \vec{v}_1 \in F_1$ et $\exists \vec{u}_2, \vec{v}_2 \in F_2$: $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- $\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$
- $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 \in F_1 \quad$ et $\quad \vec{u}_2 + \vec{v}_2 \in F_2$

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On pose : $F_1 + F_2 = \{\vec{u} \in E \mid \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{u}_2 \in F_2\}$

Proposition : $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F_1 + F_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\exists \vec{u}_1, \vec{v}_1 \in F_1$ et $\exists \vec{u}_2, \vec{v}_2 \in F_2 \ : \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- $\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$
- $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 \in F_1 \quad$ et $\quad \vec{u}_2 + \vec{v}_2 \in F_2$
- $\alpha.\vec{u} = \alpha.(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \alpha.\vec{u}_1 + \alpha.\vec{u}_2$

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On pose : $F_1 + F_2 = \{\vec{u} \in E \mid \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{u}_2 \in F_2\}$

Proposition : $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F_1 + F_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\exists \vec{u}_1, \vec{v}_1 \in F_1$ et $\exists \vec{u}_2, \vec{v}_2 \in F_2$: $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- $\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$
- $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 \in F_1 \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 + \vec{v}_2 \in F_2$
- $\alpha.\vec{u} = \alpha.(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \alpha.\vec{u}_1 + \alpha.\vec{u}_2$
- $\alpha.\vec{u}_1 \in F_1 \quad \text{et} \quad \alpha.\vec{u}_2 \in F_2$

Condition d'unicité

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 + F_2$.

Condition d'unicité

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 + F_2$.

$$\forall \vec{u} \in E, \ \exists \vec{u}_1 \in F_1 \ \exists \vec{u}_2 \in F_2 \ : \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Condition d'unicité

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 + F_2$.

$$\forall \vec{u} \in E, \ \exists \vec{u}_1 \in F_1 \ \exists \vec{u}_2 \in F_2 \ : \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Proposition : La décomposition $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ est unique si, et seulement si, $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

Condition d'unicité

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 + F_2$.

$$\forall \vec{u} \in E,\ \exists \vec{u}_1 \in F_1\ \exists \vec{u}_2 \in F_2\ : \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Proposition : La décomposition $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ est unique si, et seulement si, $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

1. Soit $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$: $\begin{array}{lll} \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} & \vec{u} \in F_1 & \vec{0} \in F_2 \\ \vec{u} = \vec{0} + \vec{u} & \vec{0} \in F_1 & \vec{u} \in F_2 \end{array}$

Condition d'unicité

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 + F_2$.

$$\forall \vec{u} \in E,\ \exists \vec{u}_1 \in F_1\ \exists \vec{u}_2 \in F_2\ : \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Proposition : La décomposition $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ est unique si, et seulement si, $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

1. Soit $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$: $\begin{array}{lll} \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} & \vec{u} \in F_1 & \vec{0} \in F_2 \\ \vec{u} = \vec{0} + \vec{u} & \vec{0} \in F_1 & \vec{u} \in F_2 \end{array}$

   donc : $\vec{u} = \vec{0}$ et $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

Condition d'unicité

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 + F_2$.

$$\forall \vec{u} \in E,\ \exists \vec{u}_1 \in F_1\ \exists \vec{u}_2 \in F_2\ : \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Proposition : La décomposition $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ est unique si, et seulement si, $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

1. Soit $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$: $\begin{array}{lll} \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} & \vec{u} \in F_1 & \vec{0} \in F_2 \\ \vec{u} = \vec{0} + \vec{u} & \vec{0} \in F_1 & \vec{u} \in F_2 \end{array}$

   donc : $\vec{u} = \vec{0}$ et $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$
2. Si $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$, supposons :
$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{u}_1, \vec{v}_1 \in F_1,\ \vec{u}_2, \vec{v}_2 \in F_2$$

Condition d'unicité

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 + F_2$.

$$\forall \vec{u} \in E, \; \exists \vec{u}_1 \in F_1 \; \exists \vec{u}_2 \in F_2 \; : \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Proposition : La décomposition $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ est unique si, et seulement si, $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

1. Soit $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$:
$$\begin{array}{lll} \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} & \vec{u} \in F_1 & \vec{0} \in F_2 \\ \vec{u} = \vec{0} + \vec{u} & \vec{0} \in F_1 & \vec{u} \in F_2 \end{array}$$
donc : $\vec{u} = \vec{0}$ et $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$
2. Si $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$, supposons :
$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{u}_1, \vec{v}_1 \in F_1, \; \vec{u}_2, \vec{v}_2 \in F_2$$
Alors : $\vec{u}_1 - \vec{v}_1 = \vec{u}_2 - \vec{v}_2 \in F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Théorème : Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E = F_1 + F_2$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. La décomposition de tout $\vec{u} \in E$ en somme $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1 \in F_1$ et $\vec{u}_2 \in F_2$ est unique.

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Théorème : Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E = F_1 + F_2$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. La décomposition de tout $\vec{u} \in E$ en somme $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1 \in F_1$ et $\vec{u}_2 \in F_2$ est unique.
2. $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Théorème : Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E = F_1 + F_2$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. La décomposition de tout $\vec{u} \in E$ en somme $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1 \in F_1$ et $\vec{u}_2 \in F_2$ est unique.
2. $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

Dans ce cas, on dit que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Théorème : Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E = F_1 + F_2$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. La décomposition de tout $\vec{u} \in E$ en somme $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1 \in F_1$ et $\vec{u}_2 \in F_2$ est unique.
2. $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

Dans ce cas, on dit que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ou que E est somme directe de F_1 et F_2.

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Théorème : Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E = F_1 + F_2$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. La décomposition de tout $\vec{u} \in E$ en somme $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1 \in F_1$ et $\vec{u}_2 \in F_2$ est unique.
2. $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

Dans ce cas, on dit que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ou que E est somme directe de F_1 et F_2.

Notation : $E = F_1 \bigoplus F_2$

Existence d'un supplémentaire

Théorème : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p d'un espace vectoriel E de dimension n, tel que : $F \subsetneq E$.

Existence d'un supplémentaire

Théorème : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p d'un espace vectoriel E de dimension n, tel que : $F \subsetneq E$.

Alors : F admet au moins un supplémentaire G dans E et :

$$E = F \bigoplus G \quad \Rightarrow \quad \dim E = \dim F + \dim G$$

Somme directe

Exemple

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

$$F_1 = \{\vec{u} = (x, 0)\} = \mathbb{R} \times \{0\}$$
$$F_2 = \{\vec{v} = (0, y)\} = \{0\} \times \mathbb{R}$$

Somme directe

Exemple

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

$$F_1 = \{\vec{u} = (x\,,0)\} = \mathbb{R} \times \{0\}$$
$$F_2 = \{\vec{v} = (0\,,y)\} = \{0\} \times \mathbb{R}$$

1. F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Somme directe

Exemple

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

$F_1 = \{\vec{u} = (x, 0)\} = \mathbb{R} \times \{0\}$
$F_2 = \{\vec{v} = (0, y)\} = \{0\} \times \mathbb{R}$

1. F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathbb{R}^2 = F_1 + F_2$.

Somme directe

Exemple

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

$$F_1 = \{\vec{u} = (x, 0)\} = \mathbb{R} \times \{0\}$$
$$F_2 = \{\vec{v} = (0, y)\} = \{0\} \times \mathbb{R}$$

1. F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathbb{R}^2 = F_1 + F_2$.
3. $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$.

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Somme directe

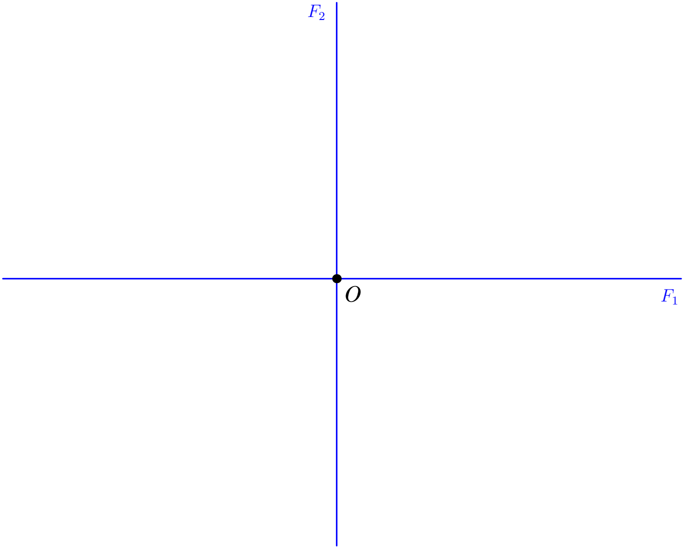
Exemple

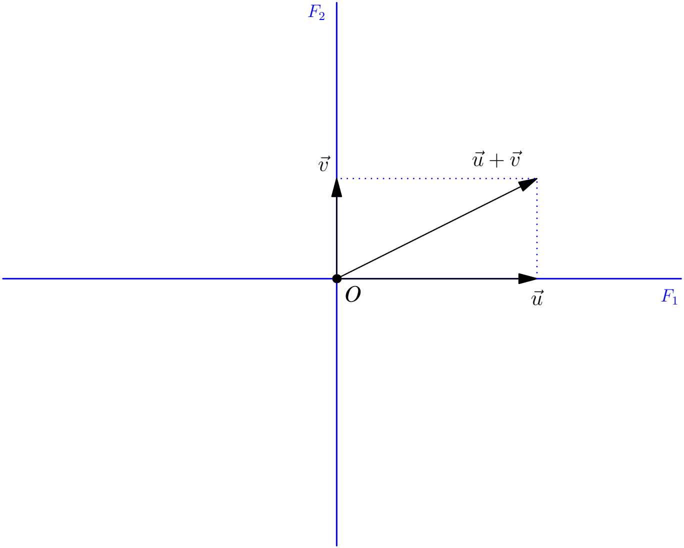
Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

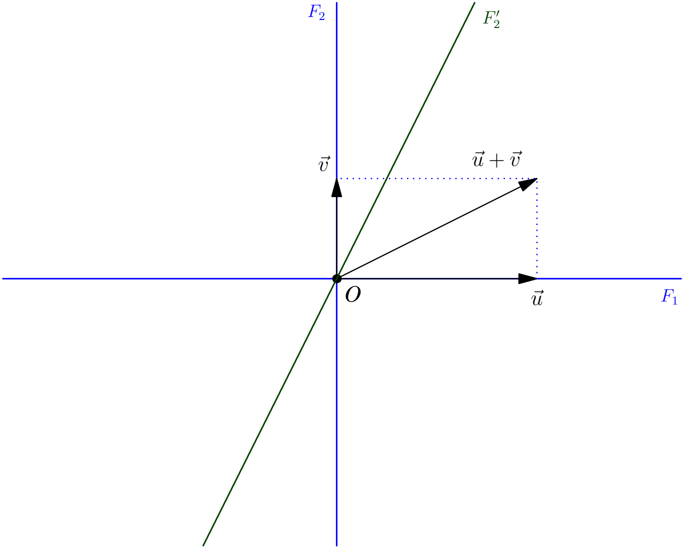
$F_1 = \{\vec{u} = (x, 0)\} = \mathbb{R} \times \{0\}$
$F_2 = \{\vec{v} = (0, y)\} = \{0\} \times \mathbb{R}$

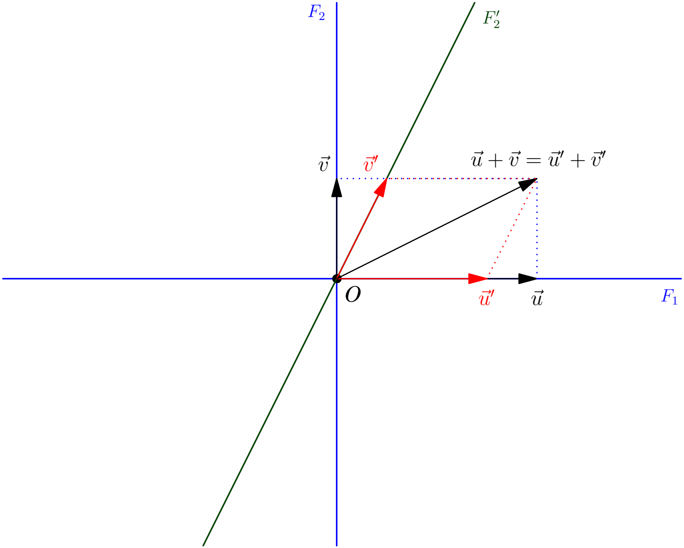
1. F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathbb{R}^2 = F_1 + F_2$.
3. $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$.

$$\mathbb{R}^2 = F_1 \bigoplus F_2$$


F_2
O
F_1


F_2
$\vec{v}$
$\vec{u}+\vec{v}$
O
$\vec{u}$
F_1


F_2
F_2'
$\vec{v}$
$\vec{u}+\vec{v}$
O
$\vec{u}$
F_1


F_2
F_2'
$\vec{v}$
$\vec{v}'$
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u}' + \vec{v}'$
O
$\vec{u}'$
$\vec{u}$
F_1

Existence d'un supplémentaire

Théorème : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p d'un espace vectoriel E de dimension n, tel que : $F \subsetneq E$.

Alors : F admet au moins un supplémentaire G dans E et :

$$E = F \bigoplus G \quad \Rightarrow \quad \dim E = \dim F + \dim G$$

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p\}$ une base de F $\quad p < n$.

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p\}$ une base de F $\quad p < n$.

Par le théorème de la base incomplète

Théorème de la base incomplète

Théorème : Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{L}$ une famille libre dans E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p\}$ une base de F $\quad p < n$.

Par le théorème de la base incomplète :

$\exists \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ tels que : $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ soit une base de E.

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p\}$ une base de $F \quad p < n$.

Par le théorème de la base incomplète :

$\exists \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ tels que : $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ soit une base de E.

$G = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p})$, tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$$

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p\}$ une base de F $\quad p < n$.

Par le théorème de la base incomplète :

$\exists \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ tels que : $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ soit une base de E.

$G = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p})$, tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$$

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i \in F \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j \in G,$$

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p\}$ une base de $F \quad p < n$.

Par le théorème de la base incomplète :
$\exists \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ tels que : $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ soit une base de E.

$G = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p})$, tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$$

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i \in F$ et $\sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j \in G$, donc : $E = F + G$

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p\}$ une base de $F \quad p < n$.

Par le théorème de la base incomplète :
$\exists \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ tels que : $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ soit une base de E.

$G = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p})$, tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i \in F$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j \in G$, donc : $E = F + G$

Si $\vec{u} \in F \cap G$

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p\}$ une base de F $\quad p < n$.

Par le théorème de la base incomplète :
$\exists \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ tels que : $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ soit une base de E.

$G = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p})$, tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i \in F$ $\quad$ et $\quad$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j \in G$, donc : $E = F + G$

Si $\vec{u} \in F \cap G$ $\quad \displaystyle\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i$

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p\}$ une base de $F \quad p < n$.

Par le théorème de la base incomplète :

$\exists \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ tels que : $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ soit une base de E.

$G = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p})$, tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$$

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i \in F \quad$ et $\quad \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j \in G$, donc : $E = F + G$

Si $\vec{u} \in F \cap G \quad \vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i = \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p\}$ une base de F $\quad p < n$.

Par le théorème de la base incomplète :
$\exists\, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ tels que : $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ soit une base de E.

$G = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p})$, tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i \in F \quad$ et $\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j \in G$, donc : $E = F + G$

Si $\vec{u} \in F \cap G \quad \vec{u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i = \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i - \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j = \vec{0}$$

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p\}$ une base de F $\quad p < n$.

Par le théorème de la base incomplète :
$\exists\, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ tels que : $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ soit une base de E.

$G = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p})$, tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i \in F$ $\quad$ et $\quad$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j \in G$, donc : $E = F + G$

Si $\vec{u} \in F \cap G$ $\quad \displaystyle\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i = \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i - \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \forall i, j, \quad \alpha_i = \beta_j = 0$$

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p\}$ une base de $F \quad p < n$.

Par le théorème de la base incomplète :
$\exists \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ tels que : $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p}\}$ soit une base de E.

$G = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p})$, tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$$

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i \in F \quad$ et $\quad \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j \in G$, donc : $E = F + G$

Si $\vec{u} \in F \cap G \quad \vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i = \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i - \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \forall i, j, \quad \alpha_i = \beta_j = 0 \quad \Rightarrow \quad F \cap G = \{\vec{0}\}$$

Proposition : Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Proposition : Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

- Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G : $H \cap F = H \cap (F \cap G) = \{\vec{0}\}$ donc : $F + G = F \bigoplus H$

Proposition : Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

- Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G :
  $H \cap F = H \cap (F \cap G) = \{\vec{0}\}$ donc : $F + G = F \bigoplus H$
- $\dim(H) = \dim(G) - \dim(F \cap G)$ donc :
  $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(H) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap H)$